UCG
University of Montenegro

Deskriptivna statistika

Vježbe III

24.10.2018.
Nemanja Batrićević

UCG
University of Montenegro

Deskriptivna statistika

- Mjere centralne tendencije
- Mjere varijacije

Centralna tendencija

- **Centralna tendencija** – mjere čije izračunavanje služi određivanju numeričke vrijednosti oko koje se rezultati grupišu
  - Aritmetička sredina – "prosjek"
  - Medijana – "središnja vrijednost"
  - Modus – "najfrekventnija vrijednost"

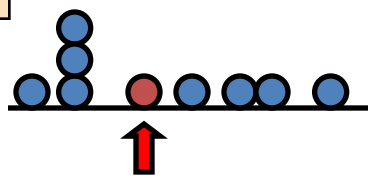
Mjere centralne tendencije

Pregled

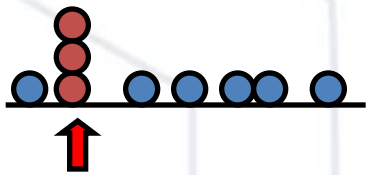
Centralna tendencija

- **Aritmetička sredina**
- **Medijana**
- **Modus**
- **Geometrijska sredina**

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$



Središna vrijednost opservacije (centralna opservacija)



Opservirana vrijednost sa najvećom frekvencijom

$$\overline{X}_G = (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)^{1/n}$$

Centralne tendencije

- **Aritmetička sredina** – suma vrijednosti podijeljena brojem vrijednosti.
  - Zavisi od ekstremnih vrijednosti
  - U slučaju agregatnih podataka koristit sredinu intervala i broj observacija
- **Medijana** – središnja opservacija nakon što ih poređamo po veličini
  - Ne zavisi od ekstremnih vrijednosti
  - Uzim se središnja vrijednost (neparan broj), ili prosjek dvije središnje vrijednosti (paran)
  - (n + 1) / 2 je pozicija u uređenom nizu, ne vrijednost medijane
- **Modus** – Vrijednost koja se najčešće pojavljuje
  - I za numeričke i atributivne (nominalne) podatke
  - Multi-modalna distribucija

Aritmetička sredina

- Aritmetička sredina (sredina) je najčešće korišćena mjera centralne tendencije
  - Za uzorak veličine n aritmetička sredina je:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

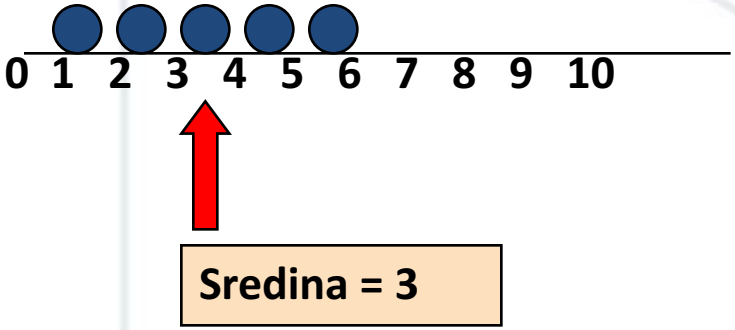
Veličina uzorka

Vrijednosti varijable

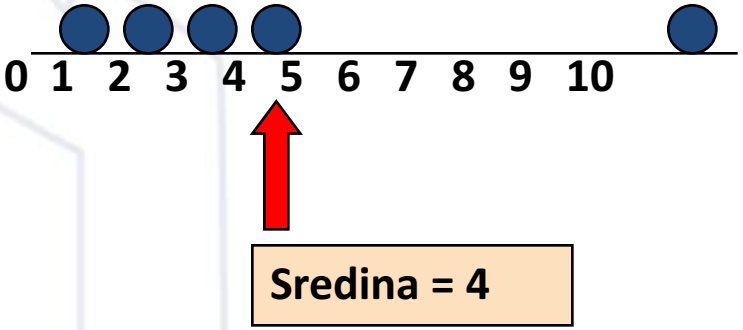
Aritmetička sredina

(nastavak)

- Sredina = suma vrijednosti podijeljena brojem tih vrijednosti (opservacija)
- Zavisi od ekstremnih vrijednosti



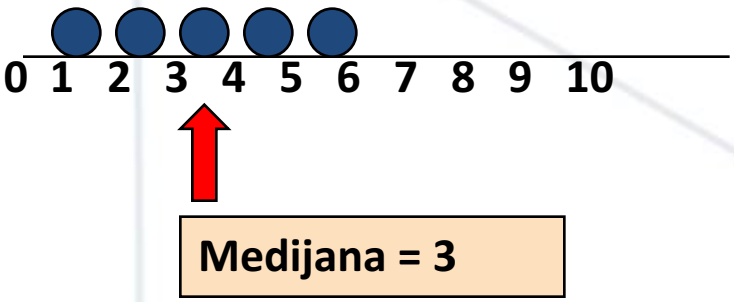
$$\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

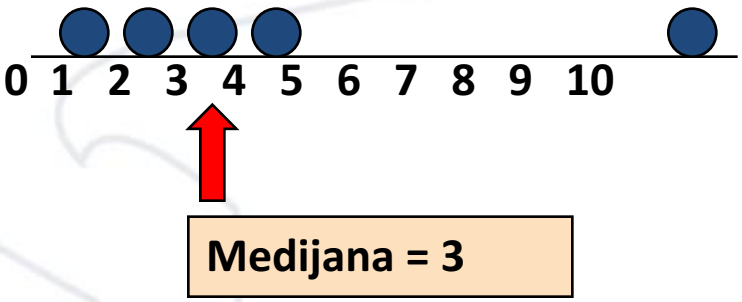


$$\frac{1+2+3+4+10}{5}=\frac{20}{5}=4$$

Medijana

- U uređenom nizu, medijana je “srednja” opservacija (50% iznad, 50% ispod)





- **Ne zavisi** od ekstremnih vrijednosti

Određivanje medijane

- Lokacija medijane se određuje na sledeći način:

$$Medijana = \frac{n+1}{2} \quad pozicija\ u\ uredjenom\ nizu$$

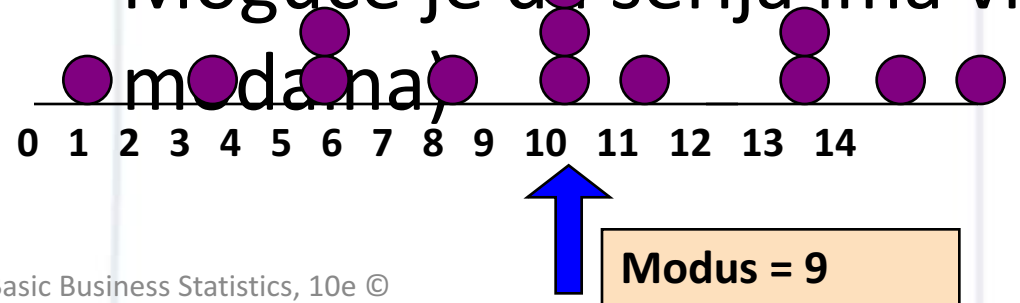
  - Ako je broj opservacija neparan, medijana je centralna opservacija
  - Ako je broj opservacija paran,medijana je prosjek dvije središne opservacije

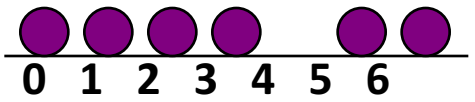
- Napomena nije *vrijednost* medijane, već samo *pozicija* medijane u uređenom nizu podataka

$$\frac{n+1}{2}$$

Modus

- Jedna od mjera centralne tendencije
- Vrijednost koja se najčešće pojavljuje
- Ne zavisi od ekstremnih vrijednosti
- Određuje se i za numeričke i za atributivne podatke
- Moguće je da serija nema modus
- Moguće je da serija ima više modusa (multi-modalna)





Primjer:

Cijene kuća:

$2,000,000
500,000
300,000
100,000
100,000

Suma**$3,000,000**

- **Sredina:** ($3,000,000/5)

(prosječna cijena) = $600,000

- **Medijana:** centralna vrijednost (cijena) u nizu

= $300,000

- **Modus:** najčešća vrijednost (cijena)

= $100,000

UCG
University of Montenegro

Mjere / Skale	Prosjek	Medijana	Modus
Racio	+	+	(+)
Intervalna	+	+	(+)
Ordinalna	(–)	+	+
Nominalna	-	-	+

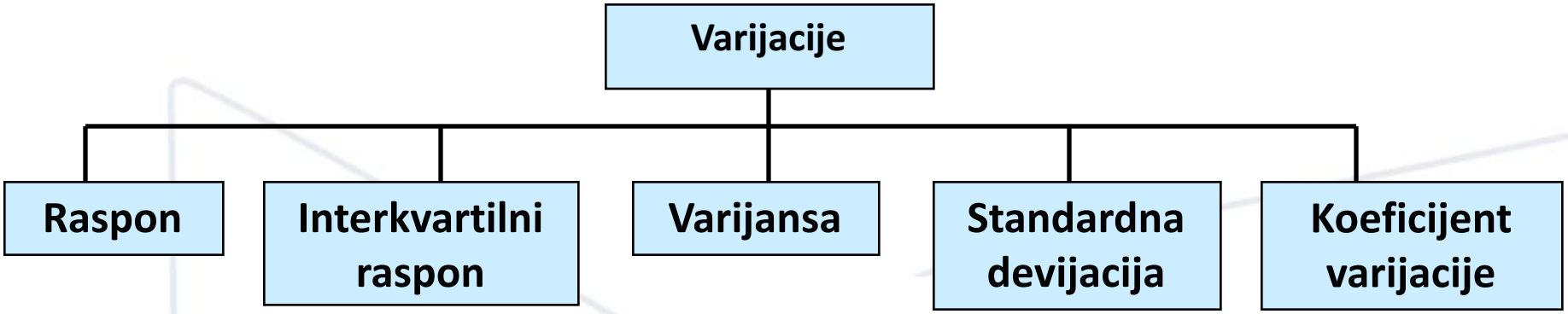
Varijacija

- **Mjere varijacije** – mjere koje opisuju „rasprostranjenost“ (disperziju) podataka.
  - Raspon
  - Interkvartalni raspon
  - Varijansa
  - Standardna devijacija

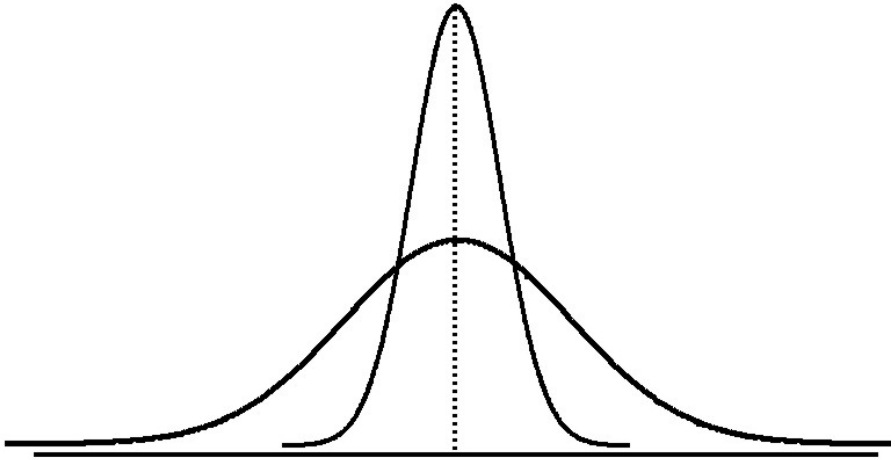
Mjere varijacije

- **Raspon** - *Xmax - Xmin*
  - Zavisi od ekstremnih vrijednosti; distribucija nevažna; problem velikog uzorka
- **Varijansa** – prosječno kvadratno odstupanje od prosjeka
- **Standardna devijacija** - kvadratni korijen iz varijanse
  - Najčešće korišćena mjera
  - Izražena u jedinicama kao i originalni podaci
  - Empirijsko pravilo: +- 1SD (68%)
    +- 2SD (95%)
    +- 3SD (99.7%)
  - Z- skor (standardizovano odstupanje)

Mjere varijacije



- Mjere varijacije daju informaciju o **disperziji ili varijabilnosti** vrijednosti obilježja, odnosno podataka.



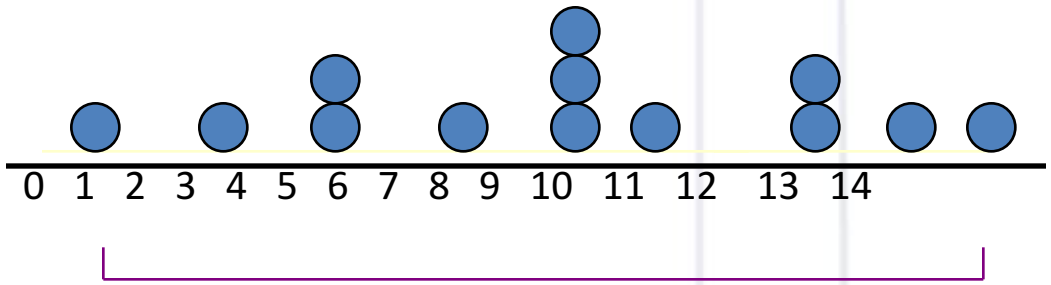
Isti centar, različita varijacija

Raspon

- Najjednostavnija mjera varijacije
- Razlika između najveće i najmanje vrijednosti obilježja u statističkoj seriji:

$$\text{Raspon} = X_{max} - X_{min}$$

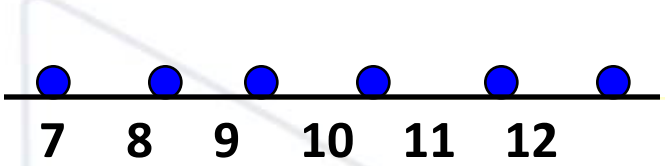
Primjer:



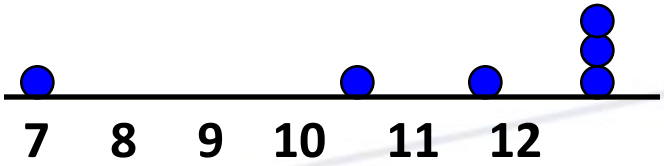
Raspon = 14 - 1 = 13

Nedostaci raspona

- Ignoriše se distribucija podataka



Raspon = 12 - 7 = 5



Raspon = 12 - 7 = 5

- Osjetljiv na outlier-e

1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,4,5

Raspon = 5 - 1 = 4

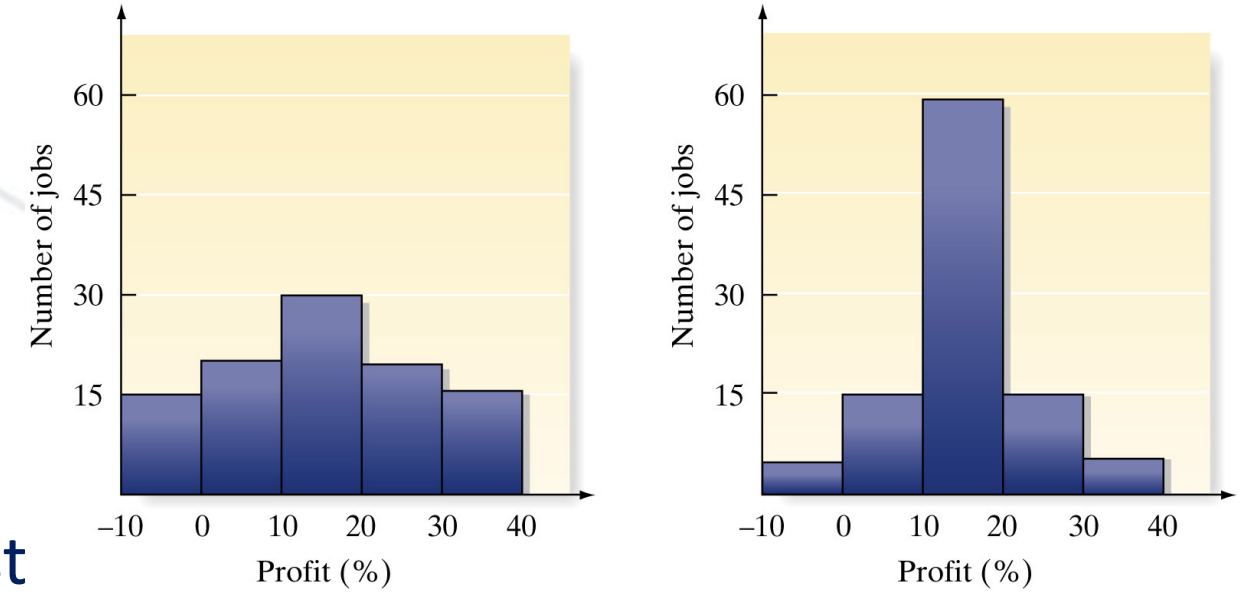
1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,4,120

Raspon = 120 - 1 = 119

Nedostaci raspona

- Gubi smisao kod jako velikih uzoraka

- Ove 2 distribucije imaju isti raspon.
- Koliko vam raspon govori o varijabilnost podataka?



a. Cost estimator A

b. Cost estimator B

Varijansa

- Prosječno (približno) kvadratno odstupanje vrijednosti obilježja od aritmetičke sredine

  – Uzoračka varijansa:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

Đe je: $\overline{X}$= aritmetička sredina

n = veličina uzorka

X_i = i^{ta} vrijednost varijable X

Standardna devijacija

- Najčešće korišćena mjera varijacije
- Pokazuje varijaciju oko aritmetičke sredine
- Izračunava se kao kvadratni koren iz varijanse
- Iskazuje se u **istim jedinicama kao i originalni podaci**

  – Standardna devijacija u uzorku:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$$

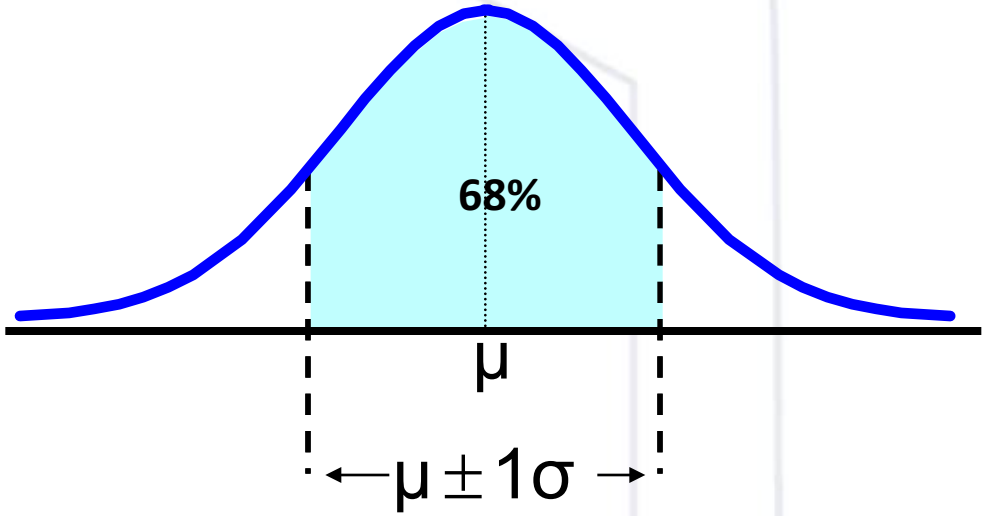
Interpretiranje standardne devijacije

- Koliko opservacija se nalazi u intervalu ± *n* s od aritmetičke sredine?

	Empirijsko pravilo
1+1s ili 1+1σ	približno 68%
1+2s ili 1+2σ	približno 95%
1+3s ili 1+3σ	približno 99.7%

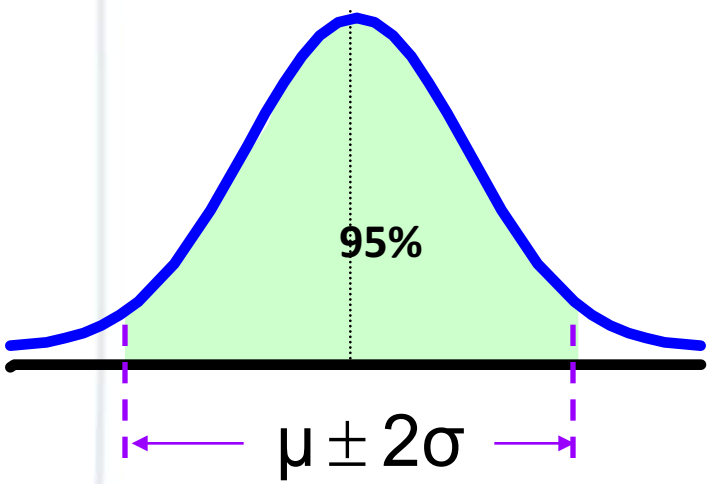
Empirijsko pravilo (pravilo 3σ)

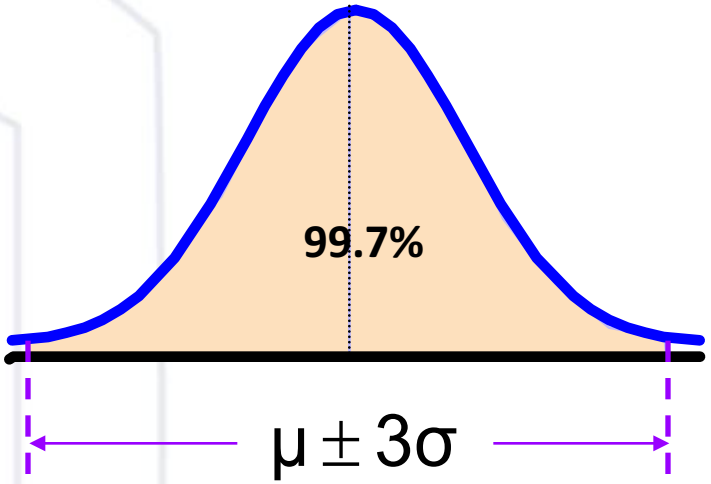
- Ako podaci imaju distribuciju u obliku zvona, onda interval:
- $\mu \pm 1\sigma$ sadrži oko 68% vrijednosti obilježja u populaciji ili u uzorku



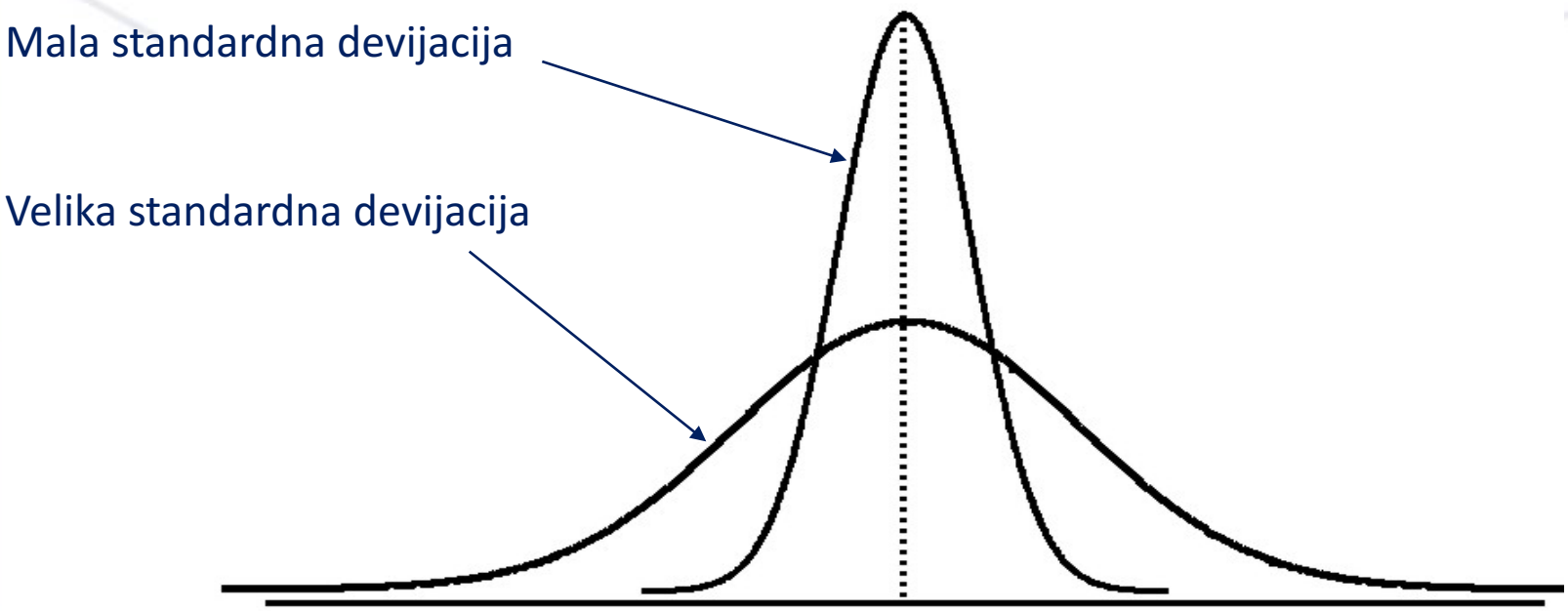
Empirijsko pravilo (pravilo 3σ)

- $\mu \pm 2\sigma$ sadrži oko 95% vrijednosti obilježja u populaciji ili u uzorku
- $\mu \pm 3\sigma$ sadrži oko 99.7% vrijednosti obilježja u populaciji ili u uzorku





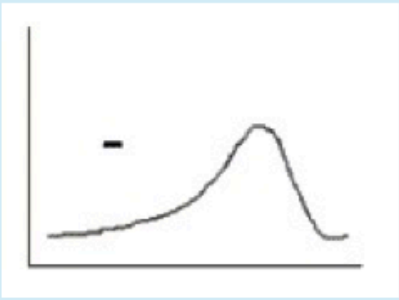
Mjerenje varijacije



Tipovi distribucije

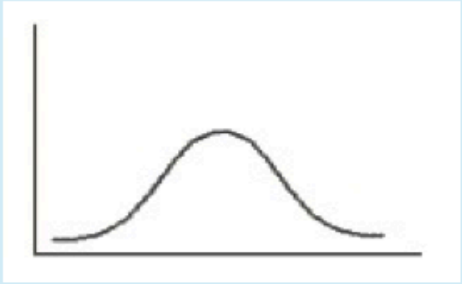
„Iskrivljena“ ulijevo

Prosjek < Medijana



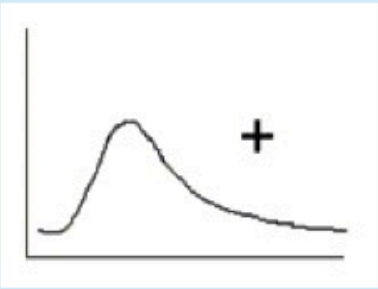
Normalna

Prosjek = Medijana



„Iskrivljena“ udesno

Prosjek > Medijana



Vježba I

Populacija za vrijednost aritmetičke sredine ima 30 i standardnu devijaciju 5.

Ukoliko dodamo vrijednost 5 svakom skoru u populaciji, koja bi bila nova vrijednost aritmetičke sredine i standardne devijacije?

Ukoliko svaki skor u populaciji pomnožimo sa 3, koja bi bila nova vrijednost aritmetičke sredine i strandardne devijacije?

Vježba I

Populacija za vrijednost aritmetičke sredine ima 30 i standardnu devijaciju 5.

Ukoliko dodamo vrijednost 5 svakom skoru u populaciji, koja bi bila nova vrijednost aritmetičke sredine i standardne devijacije?

Arit. Sredina: 35 **Stand. devijacija:** 5

Ukoliko svaki skor u populaciji pomnožimo sa 3, koja bi bila nova vrijednost aritmetičke sredine i strandardne devijacije?

Arit. Sredina: 90 **Stand. devijacija:** 15

Vježba II

*Istraživač analizira donacije građana prema političkim partijama u zemlji **X**. Za populaciju od 6 partija izračunaj: aritmetičku sredinu, medijanu, modus, raspon i standardnu devijaciju.*

***Napomena:** jedinica numeričke vrijednosti izražena je u „1.000 eura.“*

Vrijednost donacija: 11, 0, 2, 9, 9, 5

Vježba II

Arit. sredina:

Medijana:

Modus:

Vježba II

Arit. sredina:

$(11+0+2+9+9+5)/6 = 36/6 = 6$

U prosjeku, partije u zemlji X su primile 6.000 eura donacija od strane građana.

Medijana:

11, 9, 9, 5, 2, 0; niz ima paran broj vrijednosti

Dvije središnje vrijednosti su 9 i 5. Medijanu u ovom slučaju dobijamo iz aritmetičke sredine ova dva broja.

Vrijednost medijane je: 7

Modus:

Donacija:	11	0	2	9	5
Frekvenc.:	1	1	1	2	1

Vježba III

Vrijednost donacije: 11, 0, 2, 9, 9, 5

Raspon:

Varijansa: $(SS = \Sigma(X - \mu)^2)/N$

Standardna devijacija: korijenovana varijansa = 4

Vježba III

Vrijednost donacije: 11, 0, 2, 9, 9, 5

Raspon:

11-0 = 11

Varijansa: $(SS = \Sigma(X - \mu)^2)/N$

$SS = (11 - 6)^2 + (0 - 6)^2 + (2 - 6)^2 + (9 - 6)^2 + (9 - 6)^2 + (5 - 6)^2$

$= 25 + 36 + 16 + 9 + 9 + 1 = 96$

Var = 96/6 = 16

Standardna devijacija: korijenovana varijansa = 4

Izračunavanje stand. dev.

- **Korak 1**: Pronađi **aritmetičku sredinu**.
- **Korak 2**: Od svake pojedinačne vrijednosti oduzmi aritmetičku sredinu **(devijaciju)**.
- **Korak 3**: **Kvadriraj** svaku pojedinačnu devijaciju od aritmetičke sredine.
- **Korak 4**: **Saberi** sve kvadrirane devijacije.
- **Korak 5**: **Podijeli** sa brojem opservacija (veličinom populacije).
- **Korak 6**: Izračunaj **kvadratni korijen** iz dobijene vrijednosti.